Prolongement de Γ et formule de Weierstrass

Émile Séguret

Pour les leçons : 207, 235, 239, 245, 265

Références : un mélange de

- Analyse pour l'agrégation - Zuily Queffélec
- Analyse complexe et applications - Queffélec Queffélec

Prérequis. Théorèmes de prolongement analytique, d'holomorphie sous l'intégrale et de convergence dominée. Critère d'holomorphie d'un produit infini de fonctions holomorphes (voir par exemple la seconde référence).

Théorème. La fonction $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\Omega_0 = \{\mathrm{Re} > 0\}$. Elle se prolonge méromorphiquement à $\mathbf{C}$ avec des pôles simples aux entiers $-n$, $n \geq 0$, de résidu $(-1)^n/n!$. De plus, $1/\Gamma$ est une fonction entière vérifiant la formule de Weierstrass

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Démonstration.

Étape 1. Montrons que Γ est holomorphe sur Ω_0. On utilise le théorème d'holomorphie sous l'intégrale :

- $\forall z \in \Omega_0, \ \ t > 0 \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue,
- $\forall t > 0, \ \ z \in \Omega_0 \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est holomorphe,
- Domination sur $K \subset \Omega_0$ compact : il existe $0 < a \leq b$ réels tels que $\mathrm{Re}(K) \subset [a, b]$. Si $t > 0$ et $z \in K$, alors

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} \leq \left\{ \begin{array}{ll} t^{a-1}e^{-t} & \text{si } \ t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} & \text{si } \ t \geq 1 \end{array} \right. \quad \text{fonction intégrale sur }]0, \infty[\text{, car } a > 0.$$

Cette domination montre au passage que Γ est bien définie sur tout compact de Ω_0, donc bien définie sur cet ouvert.

Étape 2. On prolonge Γ holomorphiquement à $\mathbf{C} - \mathbf{N}_-$. Soit $z \in \Omega_0$. Une intégration par partie donne

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t = z\Gamma(z).$$

Pour $n \geq 1$, on note $\Omega_n = \{\mathrm{Re} > -n\} - \{0, -1, \cdots, -(n-1)\}$ (faire un dessin). Si $z \in \Omega_0$, on a, par itération : $\Gamma(z+n) = (z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$, c'est-à-dire

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z}.$$

Le terme de droite définit une fonction holomorphe sur Ω_n. On définit Γ sur Ω_n par cette formule. Si $m > n \geq 1$, alors les prolongements obtenues sur Ω_n coïncident par prolongement analytique (ils valent tous les deux Γ sur l'ouvert non vide Ω_0). On fait cela pour tout $n \geq 1$. On a ainsi prolongé Γ à tout $\mathbf{C} - \mathbf{N}_-$ de façon holomorphe. On regarde maintenant le comportement aux entiers $-n$, avec $n \geq 0$. On a

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n-1)\cdots(z+1)z} \underset{z\to -n}{\longrightarrow} \frac{\Gamma(1)}{(-1)\cdots(-n+1)(-n)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Donc $-n$ est un pôle simple de Γ et $\mathrm{Res}_\Gamma(-n) = (-1)^n/n!$.

Étape 3. Montrons que $1/\Gamma$ est holomorphe sur tout $\mathbf{C}$. Soit $x > 0$ réel. Par le théorème de convergence dominée

$$\Gamma(x) = \lim_{N\to\infty} \int_0^N t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{N}\right)^N \mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} I_N(x).$$

(Domination : $(1-t/N)^N = e^{N\log(1-t/N)} \leq e^{N(-t/N)} \leq e^{-t}$). Via plusieurs intégrations par parties, nous allons trouver une autre expression de $I_N(x)$. On a d'abord

$$I_N(x) = \left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{N}\right)^N\right]_0^N - \int_0^N \frac{t^x}{x}\left(-\frac{N}{N}\right)\left(1-\frac{t}{N}\right)^{N-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\frac{N}{N}\int_0^N t^x\left(1-\frac{t}{N}\right)^{N-1}\mathrm{d}t.$$

Puis on recommence encore et encore

$$I_N(x) = \frac{1}{x}\frac{N}{N}\frac{1}{x+1}\frac{N-1}{N}\int_0^N t^{x+1}\left(1-\frac{t}{N}\right)^{N-2}\mathrm{d}t$$

$$\cdots$$

$$I_N(x) = \frac{N(N-1)\cdots(N-(N-1))}{N^N x(x+1)\cdots(x+N-1)}\int_0^N t^{x+N-1}\left(1-\frac{t}{N}\right)^0\mathrm{d}t = \frac{N!}{N^N x(x+1)\cdots(x+N-1)}\frac{N^{x+N}}{x+N}$$

D'où finalement

$$I_N(x) = \left(xN^{-x}\prod_{n=1}^N\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)^{-1}.$$

Comme $\Gamma(x) > 0$ (c'est l'intégrale d'une fonction réelle > 0), alors

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{N\to\infty}\left(xN^{-x}\prod_{n=1}^N\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

On écrit maintenant $N^{-x} = e^{-x\log(N)} = e^{-xH_N}e^{x(H_N-\log(N))}$, où H_N est la somme partielle d'ordre N de la série harmonique. Comme $H_N - \log(N) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$ la constante d'Euler, alors, pour tout réel $z > 0$,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

Le terme de droite est une fonction entière d'après le critère d'holomorphie d'un produit de fonctions holomorphes. En effet, pour $R > 0$ et $|z| < R$,

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} = \left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{z}{n}+O_R\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O_R\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La formule de Weierstrass permet de prolonger $1/\Gamma$ en une fonction entière, bien définie par prolongement analytique puisque l'égalité à lieu sur $]0,+\infty[$ (possédant un point d'accumulation). En particulier, Γ ne s'annule pas. Enfin, connaissant les zéros d'un tel produit, on obtient les zéros de $1/\Gamma$: ce sont les $-n$, avec $n \geq 0$. On retrouve les pôles de Γ.

Remarques.

- La formule de Weierstrass permet de calculer la dérivée logarithmique de Γ sur $]0,\infty[$ et d'en déduire les valeurs d'intégrales remarquables (voir seconde référence).
- Le fait que $1/\Gamma$ est entière peut être utilisé pour prolonger holomorphiquement la fonction ζ de Riemann à $\mathbf{C}-\{1\}$ et obtenir une symétrie de ses zéros dans la bande critique. Voir le développement « Prolongement de ζ et équation fonctionnelle ».